**Enseignant.e.s: Dovi,Huruguen,Khukhro**
**Algèbre Linéaire - CMS**
**8 novembre 2024**
**Durée : 105 minutes**

X

# Contrôle 1 (Corrigé)

SCIPER : **XXXXXX**

Signature .............................................................................. Absent

**Attendez le début de l'épreuve avant de tourner la page. Ce document est imprimé recto-verso, il contient 9 questions et 8 pages, les dernières pouvant être vides. Le total est de 28 points. Ne pas dégrafer.**

- Posez votre **carte d'étudiant.e** sur la table, **vérifiez** votre nom et votre numéro SCIPER sur la première page et apposez votre **signature**.
- **Aucun** document n'est autorisé.
- L'utilisation d'une **calculatrice** et de tout outil électronique est interdite pendant l'épreuve.
- Pour les questions à **choix unique**, on comptera :
  les points indiqués si la réponse est correcte,
  $0$ point si il n'y a aucune ou plus d'une réponse inscrite,
  $0$ point si la réponse est incorrecte.
- Utilisez un **stylo** à encre **noire ou bleu foncé** et effacez proprement avec du **correcteur blanc** si nécessaire.
- Si une question est erronée, les enseignant·es se réservent le droit de l'annuler.
- Les dessins peuvent être faits au crayon.
- Répondez dans l'espace prévu (**aucune** feuille supplémentaire ne sera fournie).
- Les brouillons ne sont pas à rendre: ils ne seront pas corrigés.

Respectez les consignes suivantes | Observe this guidelines | Beachten Sie bitte die unten stehenden Richtlinien

choisir une réponse | select an answer Antwort auswählen

ne PAS choisir une réponse | NOT select an answer NICHT Antwort auswählen

Corriger une réponse | Correct an answer Antwort korrigieren

ce qu'il ne faut **PAS** faire | what should **NOT** be done | was man **NICHT** tun sollte

## Première partie, questions à choix unique

Pour chaque question, marquer la case correspondante à la réponse correcte sans faire de ratures. Il n'y a qu'**une seule** réponse correcte par question.

Les **Questions 1,2 et 3** sont indépendantes.

**Question 1** (2 points) Quel est le coefficient de $x^7$ dans le développement de :

$$(2x+x^5)^3-(1-x)^9 \ ?$$

☐ $-33$ ☐ $55$ ■ $48$ ☐ $39$ ☐ $-24$ ☐ $36$

*Correction : Le terme en $x^7$ dans cette expression est :*

$$\binom{3}{2}(2x)^2x^5-\binom{9}{7}(-x)^7=12x^7+\frac{9\times 8}{2}x^7=48x^7\,.$$

**Question 2** (2 points) Quelle est la valeur exacte de :

$$\sum_{k=1}^{3}\binom{2k+1}{3}\ ?$$

☐ $45$ ■ $46$ ☐ $34$ ☐ $55$ ☐ $42$ ☐ $38$

*Correction :* $\binom{3}{3}+\binom{5}{3}+\binom{7}{3}=1+10+35=46$.

**Question 3** (2 points) Soient $n\geqslant 2$ un entier et $E$ un ensemble avec :

$$\mathrm{Card}(E)=2n\,.$$

Combien existe-t-il de couples $(A,B)$ où $A$ et $B$ sont des sous-ensembles de $E$ avec :

$$\mathrm{Card}(A)=n \quad \text{et} \quad \mathrm{Card}(A\cup B)\geqslant 2n-1\,?$$

■ $(n+1)2^n\binom{2n}{n}$ ☐ $(n+1)\binom{2n}{n}$ ☐ $2(n+1)\binom{2n}{n}$

☐ $2n\binom{2n}{n}$ ☐ $n2^{n+1}\binom{2n}{n}$ ☐ $n\binom{2n}{n}$

*Correction : Pour chacun des $\binom{2n}{n}$ sous-ensembles $A$ possibles, écrivons $B$ :*

$$B=\underbrace{(B\cap A)}_{\text{sous-ensemble de }A}\cup\underbrace{(B\cap \complement_E(A))}_{\text{sous-ensemble de }\complement_E(A)\text{ de cardinal }\geqslant n-1}.$$

*Il y a donc $2^n(n+1)$ possibilités pour $B$.*

Pour les **Questions 4,5 et 6** on donne l'ensemble :

$$E = \{\alpha, \beta, \gamma, \delta, \varepsilon\}$$

et les deux applications $f, g : E \to E$ définies respectivement par :

$$f(\alpha) = \beta\,,\ f(\beta) = \alpha\,,\ f(\gamma) = \varepsilon\,,\ f(\delta) = \gamma\,,\ f(\varepsilon) = \delta$$

et :

$$g(\alpha) = \gamma\,,\ g(\beta) = \varepsilon\,,\ g(\gamma) = \beta\,,\ g(\delta) = \alpha\,,\ g(\varepsilon) = \beta\,.$$

**Question 4** (2 points) Quelle est la valeur de $\mathrm{Card}(A)$, où :

$$A = \{x \in E \mid (g \circ f)(x) = g(x)\}\,?$$

- ☐ $3$
- ☐ $5$
- ☐ $2$
- ☐ $0$
- ■ $1$
- ☐ $4$

*Correction : Seul $x = \gamma$ possède la propriété étudiée, puisqu'alors :*

$$\{x, f(x)\} = \{\gamma, \varepsilon\}$$

*est un doublon pour $g$ (le seul).*

**Question 5** (1 point) Parmi les affirmations suivantes, une seule est vraie. Laquelle ?

- ☐ $f$ et $g$ sont surjectives
- ☐ $g$ est surjective, $f$ est non surjective
- ☐ $f$ et $g$ sont non surjectives
- ■ $f$ est surjective, $g$ est non surjective

*Correction : $f$ est même bijective. $g$, quant à elle, n'atteint pas $\delta$ et n'est donc pas surjective.*

**Question 6** (2 points) On pose :

$$B = \{\alpha, \beta, \gamma, \varepsilon\}\,.$$

Parmi les sous-ensembles suivants de $E$, sélectionner celui qui possède le plus d'éléments :

- ☐ $f^{-1}(B)$
- ☐ $\complement_E(B)$
- ☐ $B$
- ☐ $f(B)$
- ☐ $g(B)$
- ■ $g^{-1}(B)$

*Correction : $g^{-1}(B)$ possède $5$ éléments, ce qui est clairement maximal. Les sous-ensembles $B, f(B)$ et $f^{-1}(B)$ en possède $4$. Enfin, $g(B)$ en possède $3$ et $\complement_E(B)$ seulement $1$.*

## Deuxième partie, questions de type ouvert

Répondre dans l'espace dédié. Votre réponse doit être soigneusement justifiée, toutes les étapes de votre raisonnement doivent figurer dans votre réponse. Laisser libres les cases à cocher : elles sont réservées au correcteur.

**Question 7:** *Cette question est notée sur 5 points.*

.5 .5 .5 .5 .5
0 1 2 3 4 5

On considère l'application $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2$ donnée par :

$$f(x) = (2x, 4x^2 + 1).$$

(a) L'application $f$ est-elle injective ? Justifier votre réponse.

(b) Pour tout $(u, v) \in \mathbb{R}^2$, déterminer l'ensemble des antécédents de $(u, v)$ par $f$.

(c) Déterminer l'image directe $f(\mathbb{R})$ de $f$. L'application est-elle surjective ? Justifier.

(d) Soit $A = [0, +\infty[$. Trouver l'image directe $f(A)$. L'application :

$$A \to f(A)\,,\ x \to f(x)$$

est-elle bijective ? Si oui, donner l'application réciproque; si non, expliquer pourquoi.

**Solution**

(a) L'application est injective. En effet, on a

$$\begin{aligned} f(x) = f(x') &\iff \big(2x, 4x^2 + 1\big) = \big(2x', 4(x')^2 + 1\big) \\ &\iff 2x = 2x' \text{ et } 4x^2 + 1 = 4(x')^2 + 1 \\ &\Longrightarrow 2x = 2x' \\ &\iff x = x' \end{aligned}$$

(b) Pour $(u, v) \in \mathbb{R}^2$, on a

$$\begin{aligned} x \in f^{-1}(\{(u, v)\}) &\iff f(x) = (u, v) \\ &\iff (2x, 4x^2 + 1) = (u, v) \\ &\iff 2x = u \text{ et } 4x^2 + 1 = v \\ &\iff x = u/2 \text{ et } 4x^2 + 1 = v \\ &\iff x = u/2 \text{ et } 4(u/2)^2 + 1 = v \\ &\iff x = u/2 \text{ et } u^2 + 1 = v \end{aligned}$$

On a donc

$$f^{-1}(\{(u, v)\}) = \begin{cases} \{u/2\} & \text{si } v = u^2 + 1 \\ \emptyset & \text{si } v \neq u^2 + 1 \end{cases}$$

(c) $(u, v) \in f(\mathbb{R}) \iff f^{-1}(\{(u, v)\}) \neq \emptyset \iff v = u^2 + 1.$

L'image directe $f(\mathbb{R})$ est donc donnée par

$$f(\mathbb{R}) = \{(u, v) \in \mathbb{R}^2 \mid v = u^2 + 1\}.$$

Puisque cet ensemble n'est pas égal à $\mathbb{R}^2$, l'application n'est pas surjective. (Ou, par exemple, $(0, 0)$ n'appartient pas à l'image.)

(d) $f(A) = \{(u, v) \mid u \geq 0, v = u^2 + 1\}$.

$f : A \to f(A)$ est bijective.

L'application réciproque $f^{-1} : f(A) \to A$ est donnée par

$$f^{-1}(u, v) = u/2,$$

car $u/2$ est l'unique antécédent par $f$ de $(u, v) \in f(A)$.

**Question 8:** *Cette question est notée sur 6 points.*

.5 .5 .5 .5 .5 .5
0 1 2 3 4 5 6

**Dans cette question, on ne demande que les réponses finales, sans développement. Aucune justification ne sera prise en compte.**

Soit $\mathbb{N} = \{0, 1, 2, 3, \ldots\}$ et soient les sous-ensembles de $\mathbb{N}$ suivants :

$$A = \{1, 2, 3\}\,,\ B = \{3, 4\}\,,\ C = \{1, 5\}\,.$$

(a) Expliciter l'ensemble $\left[\complement_{\mathbb{N}}(A \cup C)\right] \cap B$ comme liste de ses éléments.
$\left[\complement_{\mathbb{N}}(A \cup C)\right] \cap B = \{4\}$.

(b) Expliciter l'ensemble $(A \cup B) \cap \{n \in \mathbb{N} \mid \exists k \in \mathbb{N}, n = 2k\}$ comme liste de ses éléments.
$(A \cup B) \cap \{n \in \mathbb{N} \mid \exists k \in \mathbb{N}, n = 2k\} = \{2, 4\}$.

(c) Donner la contraposée de l'énoncé :

$$\forall n \in \mathbb{N},\ \ n \notin A \cup B \implies n \notin C \tag{$*$}$$

$\forall n \in \mathbb{N},\ \ n \in C \implies n \in A \cup B$.

(d) Donner un contre-exemple à l'énoncé $(*)$ ci-dessus.
$5$ est un contre-exemple à $(*)$ car $5 \in C$ mais $5 \notin A \cup B$.

(e) Soit $D = \{0, 3, 6, 9, 12, \ldots\} \subset \mathbb{N}$. Écrire $\complement_{\mathbb{N}}(D)$ à l'aide d'une propriété caractéristique.
$\complement_{\mathbb{N}}(D) = \{n \in \mathbb{N} \mid \forall k \in \mathbb{N}, n \neq 3k\}$.

(f) Donner un exemple explicite d'une surjection $f : A \to B$ satisfaisant :

$$\forall n \in A,\ \ n \text{ impair } \implies f(n) \text{ pair }.$$

$f : A \to B$ donné par

$$f(1) = 4,$$
$$f(2) = 3,$$
$$f(3) = 4.$$

**Question 9:** *Cette question est notée sur 6 points.*

☐.5 ☐.5 ☐.5 ☐.5 ☐.5 ☐.5
■0 ☐1 ☐2 ☐3 ☐4 ☐5 ☐6

On considère l'application :

$$f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, x \to x^3 - 12x\,.$$

On rappelle que vos réponses doivent être soigneusement justifiées.

(a) Pour tout $x \in \mathbb{R}$, déterminer l'ensemble $f^{-1}(\{f(x)\})$. L'application $f$ est-elle injective ?

(b) Soit $A = ]-\infty, -10] \cup [3, +\infty[$. La restriction de l'application $f$ à $A$ est-elle injective ?

**Solution**

(a) L'ensemble $f^{-1}(\{f(x)\})$ est l'ensemble des solutions de l'équation (en $x'$):

$$f(x') = f(x) \Leftrightarrow (x')^3 - 12x' = x^3 - 12x \Leftrightarrow (x'-x)((x')^2 + xx' + x^2 - 12) = 0$$

On peut donc écrire:

$$f^{-1}(\{f(x)\}) = \{x\} \cup \{\text{ solution(s) de } (x')^2 + xx' + x^2 - 12 = 0\}$$

Le discriminant de l'équation du second degré (en $x'$) qui est apparue dans la factorisation est :

$$\Delta = x^2 - 4(x^2 - 12) = -3x^2 + 48 = 3(16 - x^2).$$

On obtient alors:

$$f^{-1}(\{f(x)\}) = \begin{cases} \{x\} \text{ si } x \in ]-\infty, -4[\cap]4, +\infty[ \\ \{x, -\frac{x}{2}\} \text{ si } x = \pm 4 \\ \{x, \frac{-x+\sqrt{48-3x^2}}{2}, \frac{-x-\sqrt{48-3x^2}}{2}\} \text{ si } x \in ]-4, 4[ \end{cases}$$

L'application $f$ n'est donc pas injective. Par exemple, $f(4) = 16$ possède deux antécédents : $4$ et $-2$.

Remarque : dans le cas où $x \in ]-4, 4[$, il se peut que l'une des racines obtenues par l'équation du second degré soit égale à $x$. Dans ce cas, $f(x)$ possède deux antécédents par $f$ et non trois, comme la notation pourrait le suggérer.

(b) Soit $x \in A$. On a

$$A \cap f^{-1}(\{f(x)\}) = \begin{cases} A \cap \{x\} \text{ si } x \in ]-\infty, -10[\cap]4, +\infty[ \\ A \cap \{x, -\frac{x}{2}\} \text{ si } x = 4 \\ A \cap \{x, \frac{-x+\sqrt{48-3x^2}}{2}, \frac{-x-\sqrt{48-3x^2}}{2}\} \text{ si } x \in [3, 4[ \end{cases}$$

Si $x = 4$, $x \in A$ mais $\frac{-x}{2} = -2 \notin A$.
Si $3 \leq x \leq 4$, on a $-2 \leq \frac{-x}{2} \leq \frac{-3}{2}$ et

$$\begin{aligned} 9 \leq x^2 \leq 16 &\Longrightarrow -48 \leq -3x^2 \leq -27 \\ &\Longrightarrow 0 \leq 48 - 3x^2 \leq 21 \\ &\Longrightarrow 0 \leq \frac{\sqrt{48-3x^2}}{2} \leq \frac{\sqrt{21}}{2} \end{aligned}$$

et donc

$$-10 < -2 \leq \frac{-x + \sqrt{48-3x^2}}{2} \leq \frac{\sqrt{21}}{2} - \frac{3}{2} < 3$$

et

$$-10 < -2 - \frac{\sqrt{21}}{2} \leq \frac{-x - \sqrt{48 - 3x^2}}{2} \leq -\frac{3}{2} < 3$$

On a donc

$$A \cap f^{-1}(\{f(x)\}) = \{x\} \quad \forall x \in A.$$

La restriction est donc injective.